15/03/2019

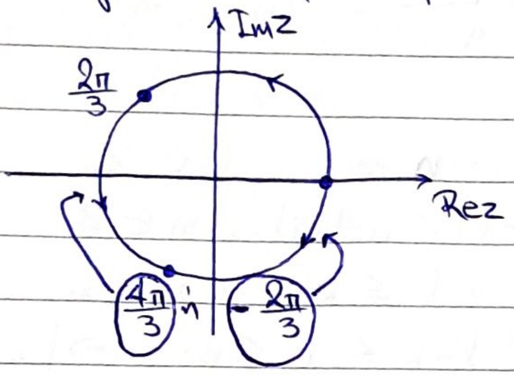
Η $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}^*$, έχει n διαφορετικές μιγαδικές ρίζες, τις $z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$

$\xRightarrow[w=1]{}$ Η $\zeta^n = 1$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ έχει τις n διαφορετικές μιγαδικές ρίζες: $\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$

π.χ. για $n = 2$, έχουμε τις ρίζες: $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = e^{i\pi} = -1$ κτλ

είναι πάντα

για $n = 3$, έχουμε: $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\zeta_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$



Ορισμός: Η συνάρτηση $\sqrt[n]{\cdot}$: $z \longmapsto \sqrt[n]{z} := \underbrace{\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, z}{n}}}_{=w}$, για $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και : $\sqrt[n]{0} := 0$, ~~για~~ όπου $n \in \mathbb{N}$.

Ονομάζεται η συνάρτηση της n-οστής ρίζας.

Παρατήρηση: $\sqrt[n]{w} = z_0$, ρίζα της $z^n = w$ (στο $\mathbb{C}$)

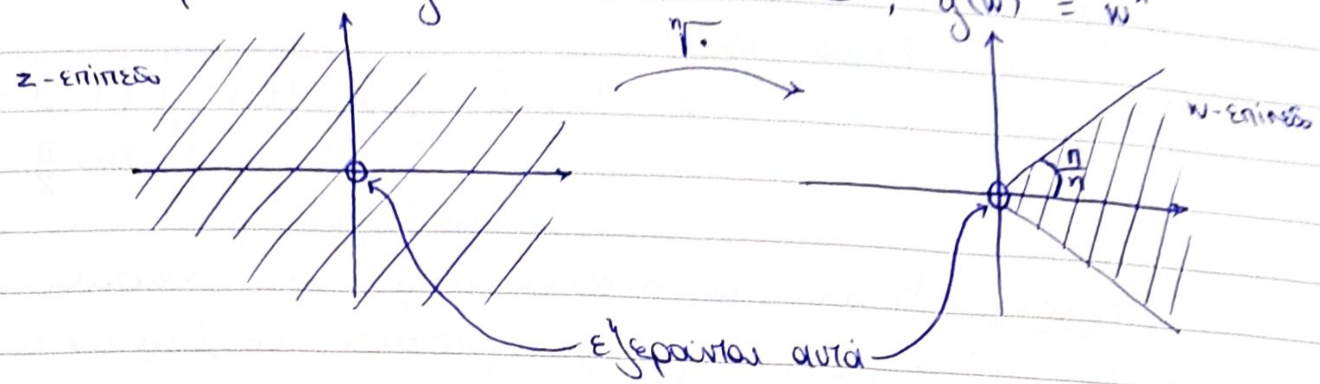
Παρατήρηση: Η συνάρτηση n-οστής ρίζας (συμβολικά: $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) είναι επέκταση της συνάρτησης της n-οστής ρίζας στο $[0, \infty)$ δηλ. της : $\sqrt[n]{r} = e^{(\ln r)/n}$, $r > 0$ και $\sqrt[n]{0} = 0$

Παρατήρηση [Απόδειξη : Άσκηση, βλ. Σημειώσεις] :

Η συνάρτηση της n-οστής ρίζας : ~~$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \sqrt[n]{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$~~ κύριο όρισμα

$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \sqrt[n]{\mathbb{C}} = \underbrace{\{0\} \cup \{w \in \mathbb{C}^* : -\frac{\pi}{n} < \mathrm{Arg}\, w \le \frac{\pi}{n}\}} =: \Gamma$

είναι 1-1 και επί με αντίστροφη τον περιορισμό της συνάρτησης η συνάρτηση : $g = \cdot^n : \Gamma \to \mathbb{C}$, $g(w) = w^n$



<u>Παρατήρηση:</u> Με τον ορισμό της συνάρτησης n-οστής ρίζας οι ρίζες της $z^n = w$, $w \in \mathbb{C}^*$, είναι οι :

$$z_k = \sqrt[n]{w}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad , \; k = 0, \dots, n-1$$

$$= z_0 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

π.χ. για $n=2$ προκύπτει : $z^2 = \underset{\in \mathbb{C}^*}{w} \iff z = \pm\sqrt{w}$,

αφού $e^{i0} = 1$ και $e^{i\pi} = -1$.

[Προέκυψε από τον τύπο $z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}w + 2k\pi}{n}}$

$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}w}{2}} = \sqrt{w}$

$z_1 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}w}{2}}\, e^{i\pi} = -\sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}w}{2}} = -\sqrt{w}$

<u>Παράδειγμα</u> (SUPER - TRIVIAL - SOS) :

<u>Να επιλυθεί</u> η $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Λύση :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0 \iff$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \underset{4^{\text{η}} \text{ παρατήρηση}}{\overset{\text{από την}}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\iff z = -\frac{b}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}_{\substack{\text{η εικόνα του υπόριζου υπό τη} \\ \text{συνάρτηση 2-οστής ρίζας}}} \in \mathbb{C} (!!!)$$

(π.χ) $z^2 = -1$ $\left(\iff az^2+bz+c=0,\ \text{με } a=c=1,\ b=0\right)$

έχει λύσεις τις:

$$z = \pm\sqrt{-1}, \quad \text{με } \boxed{\sqrt{-1} =} \sqrt{|-1|}\, e^{i\frac{\overbrace{Arg(-1)}^{\pi}}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \boxed{= i}$$

<u>Προσοχή</u>: Η συνάρτηση n-οστής ρίζας είναι επέκταση της πραγματικής ρίζας <u>μόνο</u> για μη αρνητικούς πραγματικούς $r \geq 0$:

(π.χ)

$$\sqrt[3]{-1} \underset{\substack{\text{ορισμός} \\ \text{συνάρτησης n-οστής ρίζας}}}{=} \sqrt[3]{|-1|}\, e^{i\frac{Arg(-1)}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

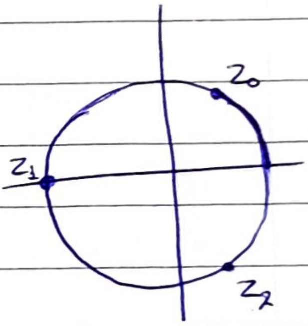
(ΚΑΙ ΟΧΙ $\sqrt[3]{-1} = -1$!!!, όπως καμιά φορά ορίζεται στους πραγματικούς).

[Το ότι καμιά φορά λέμε «$\sqrt[3]{-1} = -1$» οφείλεται στο ότι η εξίσωση $z^3 = -1$ έχει τρεις διαφορετικές μιγαδικές ρίζες, τις:

$$z_0 = \sqrt[3]{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



3.2 Επίλυση της $e^z = w$ και λογαριθμική συνάρτηση

Έστω $w \in \mathbb{C}^*$ θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $e^z = w$

[Αφού $|e^z| = |e^{Re z + i Im z}| = |e^{Re z}| > 0$, για $w = 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση.]

<u>Επίλυση</u>: $e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{>0} \cdot e^{i\underbrace{y}_{\in\mathbb{R}}} = w = \underbrace{|w| \cdot e^{i Arg w}}_{\text{μοναδική παράσταση του w σε πολική μορφή}} \left(= |w| e^{i \arg w}\right)$

$\iff e^x = |w|^{(>0)}$ και $y = \arg w = Arg\, w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

↳ άρα έχουμε άπειρα y που να το ικανοποιούν

Συνεπώς, $\boxed{\text{οι λύσεις της } e^z = w \text{ είναι οι: } z_k = \ln|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi), \ k\in\mathbb{Z}}$

[όπου $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ οι οποίες θεωρούνται γνωστές]

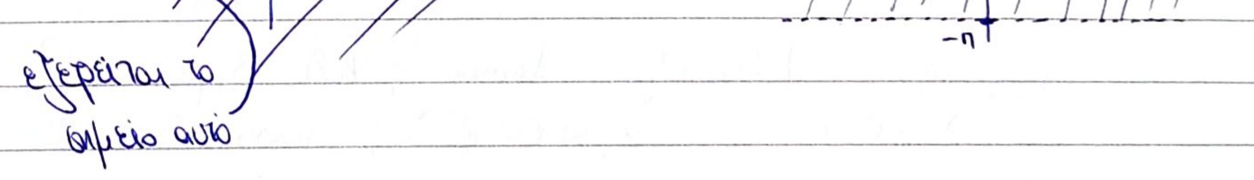
<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\log : z \longmapsto \log z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, $z\in\mathbb{C}^*$ ονομάζεται <u>λογαριθμική συνάρτηση</u> (και η τιμή $\log z$ ονομάζεται <u>λογάριθμος</u> του $z\in\mathbb{C}^*$)

<u>Παρατηρήσεις</u>:

α. Η λογαριθμική συνάρτηση στο $\mathbb{C}^*$ είναι επέκταση του φυσικού λογαρίθμου στο $(0,\infty)$

β. [Απόδειξη: Άσκηση, βλ. Σημειώσεις]
Η λογαριθμική συνάρτηση $\log : \mathbb{C}^* \to \log(\mathbb{C}^*) = \underbrace{\{w\in\mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}}_{\Lambda}$

είναι 1-1 και επί με αντίστροφη τον περιορισμό της εκθετικής στο Λ, η οποία είναι δηλαδή η εκθετική συνάρτηση
$\exp : \Lambda \to \mathbb{C}^*$



γ. Με τον ορισμό αυτόν προκύπτει ότι οι ρίζες της $e^z = w$ είναι οι: $z_k = \log w + 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

δ. Πολλές φορές η $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ του ορισμού συμβολίζεται ως Log του ονομάζεται κύριος (ή πρωτεύων) κλάδος της πλειονότιμης λογαριθμικής συνάρτησης $z \longmapsto \operatorname{Log} z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Παράδειγμα:</u> Να επιλυθεί ως προς $z \in \mathbb{C}$ η εξίσωση:

$$e^z = i \underset{\text{βλ. πιο πάνω}}{\Longleftrightarrow} z = \log i + 2k\pi i,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\log i \underset{\text{ορισμός}}{=} \ln|i| + i \operatorname{Arg} i = i\frac{\pi}{2}$$

1.3.3. Η συνάρτηση λ-δύναμης, $\lambda \in \mathbb{C}$

<u>Ορισμός:</u> Η συνάρτηση $\cdot^{\lambda} : z \longmapsto z^{\lambda}$, $z \in \mathbb{C}^*$, με $z^{\lambda} := e^{\lambda \log z}$, ονομάζεται συνάρτηση της λ-δύναμης και η τιμή z^{λ} ονομάζεται λ-δύναμη του z και $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]$

$\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

Όταν βλέπουμε log θα θυμόμαστε τον προηγούμενο ορισμό.

<u>Παράδειγμα:</u> $i^i = e^{i \log i} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ($\in \mathbb{R}$!!!)

<u>Παρατηρήσεις:</u>

α. $\cdot^{\lambda} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ταυτίζεται (στο $\mathbb{C}^*$) για $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ με τη συνάρτηση n-οστής δύναμης και για $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, με τη συνάρτηση της n-οστής ρίζας.

β. <u>Ιδιότητες:</u> [Απόδειξη: Άσκηση, βλ. Σημειώσεις]
Για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}^*$, ισχύουν $z^{-\lambda} = \frac{1}{z^{\lambda}}$

$z^{\lambda} z^{\mu} = z^{\lambda+\mu}$ και <u>αν</u> $\lambda \log z \in \Lambda = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ <u>επιπλέον</u> $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$, ενώ <u>αν</u> $zw \in \Lambda$, <u>επιπλέον</u> $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$

Λύστε τις (μη γεωμετρικές) Ασκήσεις στις Σημειώσεις, έως Α.26 (σελ. 33)

Κεφάλαιο 2 : Τοπολογία του $\mathbb{C}$ – Ακολουθίες του $\mathbb{C}$ – Όρια και συνέχεια μιγ. συν. μιγ. μετ.

→ Τοπολογία του $\mathbb{C}$

§2.1 Όπως είδαμε, το σώμα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ αντιστοιχεί (1-1 και επί) στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο επιπλέον, με τον εσωτερικό πολλ.:
$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2\,,\, x_1y_2 + x_2y_1)$, όπου
$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\left[\Rightarrow i^2 \underset{\text{αντιστοιχία}}{=\!=\!=} (0,1)(0,1) = (-1,0) \underset{\text{αντιστοιχία}}{=\!=\!=} -1\right]$$

και $\boxed{|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|} \Rightarrow$ Η απόλυτη τιμή του $z = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z$ αντιστοιχεί στην Ευκλ. νόρμα του διανύσματος $\|(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)\| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Η τοπολογία του } \mathbb{C} \text{ είναι η τοπολογία του } \mathbb{R}^2}$

Πιο συγκεκριμένα, ως προς τις τοπολογικές ιδιότητες του θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως τον χώρο με νόρμα (επειδή είναι και πλήρης χώρος Banach) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ο οποίος αντιστοιχεί στον διδιάστατο διανυσματικό χώρο (πάνω από το $\mathbb{R}$) με νόρμα $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ο οποίος είναι μετρικός χώρος.

Ειδικότερα, ως νόρμα η απολ. τιμή $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες, δηλ.:

$|z| \geq 0$ και $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|\lambda z| = |\lambda|\cdot|z|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$|z+w| \leq |z| + |w|$

και ~~...~~ επάγει την απόσταση μεταξύ των $z, w \in \mathbb{C}$ (μετρική)

$d(z,w) := |z-w|$

με τις ιδιότητες:

$|z-w| \geq 0$ και $|z-w| = 0 \Leftrightarrow z = w$

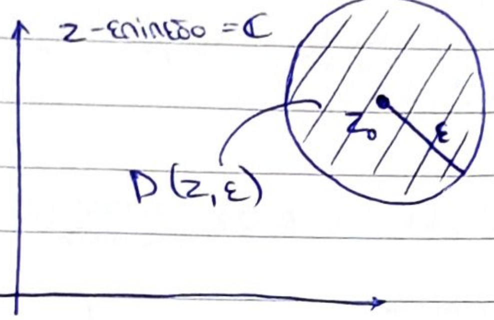
$|z-w| = |w-z|$

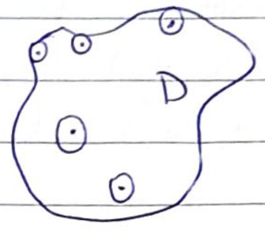
$|z-w| \leq |z-a| + |a-w|$, για $z, w, a \in \mathbb{C}$

(Συνέχεια):

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται ανοικτό, αν $\forall\ z \in D,\ \exists\ \varepsilon > 0 : D(z,\varepsilon) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < \varepsilon\} \subset D$

(και το $D(z,\varepsilon)$ ονομάζεται ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου z και ακτίνας ε)





Ένα υποσύνολο ονομάζεται κλειστό, αν $\mathbb{C} \setminus D$ είναι ανοικτό.

Πρόταση 2.1.1: Ισχύουν όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες ανοικτών και κλειστών στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: $\bar{D}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$: κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου z, ακτίνας $r > 0$

$\partial D(z,r) = \{ \ldots\ldots = r\}$: κύκλος ......

Όλα τα σχετικά ορίζονται ανάλογα (Άσκηση: επανάληψη)

Εσωτερικό σημείο ενός υποσυνόλου $D \subset \mathbb{C}$, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο, εσωτερικό συνόλου D, εξωτερικό συνόλου D, σύνορο συνόλου D, κλειστή θήκη, μεμονωμένο σημείο, σημείο συσσώρευσης, σημείο επαφής

→ Άσκηση 27 (αντίστροφη τριγ. ανισότητα)